

ABSTRAK

KELAS GELANGGANG NOETHER KOMUTATIF DENGAN DIMENSI VALUASI BERHINGGA

Oleh

Samsul Arifin

NIM: 30114012

(Program Studi Doktor Matematika)

Gelanggang valuasi adalah gelanggang komutatif yang koleksi dari semua idealnya terurut total terhadap relasi inklusi. Ukuran yang merepresentasikan seberapa jauh suatu gelanggang komutatif menyimpang dari sifat valuasi disebut dengan dimensi valuasi. Modul uniserial adalah modul yang koleksi dari semua submodulnya terurut total terhadap relasi inklusi. Ukuran yang merepresentasikan seberapa jauh suatu modul menyimpang dari sifat uniserial disebut dengan dimensi uniserial. Untuk suatu gelanggang R , dimensi uniserial dari R -modul M disebut dimensi valuasi dari gelanggang R . Dengan demikian konsep dimensi valuasi termotivasi oleh konsep dimensi uniserial.

Disertasi ini membahas kelas gelanggang Noether komutatif dengan dimensi valuasi berhingga. Pertama, peneliti melakukan karakterisasi kelas gelanggang Noether komutatif dengan dimensi valuasi berhingga. Selanjutnya peneliti mengkaji modul yang dibangun secara berhingga atas gelanggang Noether komutatif dengan dimensi valuasi berhingga, khususnya terkait dengan dimensi uniserial dari modulnya. Perhatikan bahwa dalam melakukan karakterisasi suatu lapangan dapat dilakukan dengan mengkaji modul atas lapangan tersebut, yang tidak lain adalah suatu ruang vektor. Dengan cara sama, untuk menentukan sifat-sifat dari gelanggang Noether/Artin dapat dilakukan dengan mengkaji sifat-sifat dari modul atas gelanggang Noether/Artin. Begitu juga dalam disertasi ini, peneliti mengkaji sifat-sifat dari gelanggang Noether komutatif dengan dimensi valuasi berhingga, tetapi melalui pendekatan sifat-sifat dari modul yang dibangun secara hingga atas gelanggang Noether komutatif dengan dimensi valuasi berhingga.

Kontribusi utama yang dihasilkan dalam disertasi ini adalah karakterisasi kelas gelanggang Noether komutatif dengan dimensi valuasi berhingga yang dilakukan dengan melakukan pendekatan melalui gelanggang lokal. Khususnya ditunjukkan bahwa suatu gelanggang komutatif Noether R memiliki dimensi valuasi berhingga jika dan hanya jika R adalah gelanggang valuasi atau Artin. Selanjutnya, peneliti menghasilkan suatu metode untuk menentukan dimensi uniserial suatu modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi diskrit dengan melakukan pendekatan melalui dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi

diskrit, baik melalui modul torsi dan modul bebas torsi, untuk mengeksplorasi dimensi uniserial dari modulnya. Telah ditunjukkan bahwa dimensi uniserial dari suatu modul adalah suatu fungsi dari pembagi-pembagi elementer modulnya dan rank dari bagian modul non torsinya.

Hasil tambahan dalam disertasi ini antara lain mengenai dimensi valuasi suatu daerah ideal utama, yang diperoleh melalui eksplorasi gelanggang faktor dari daerah ideal utama tersebut. Hasil tambahan lainnya adalah suatu kode program Python untuk menghitung dimensi valuasi dan dimensi uniserial dari beberapa gelanggang dan modul.

Kata-kunci: *dimensi valuasi, dimensi uniserial, gelanggang Artin, gelanggang lokal, daerah valuasi diskrit.*

ABSTRACT

THE CLASS OF COMMUTATIVE NOETHERIAN RINGS WITH FINITE VALUATION DIMENSION

By

Samsul Arifin

NIM: 30114012

(Doctoral Program in Mathematics)

A valuation ring is a commutative ring whose collection of all ideal is totally ordered by inclusion. Measures that represent how far a commutative ring deviates from being valuation is called valuation dimension. A uniserial module is a module whose collection of all submodules is totally ordered by inclusion. A measure that represents how far a module deviates from being uniserial is called the uniserial dimension. For a ring R , the uniserial dimension of an R -module M is called the valuation dimension of a ring R . Thus the notion of the valuation dimension is motivated by the notion of the universal dimension.

This dissertation discusses the class of commutative Noetherian ring with finite valuation dimensions. First, we characterize the class of commutative Noetherian ring with finite valuation dimensions. In this stage, it is produced that the class of commutative Noetherian ring with finite valuation dimensions only contains the Artinian and valuation ring. Next, we study the finitely generated modules over the commutative Noetherian ring with finite valuation dimensions, specifically related to the uniserial dimension of the module. Note that in characterizing a field it can be done by reviewing the module over that field, which is a vector space. In the same way, to determine the properties of the Noetherian/Artinian ring can be done by examining the properties of the module over the Noetherian/Artinian ring. Likewise in this dissertation, we study the properties of the commutative Noetherian ring with finite valuation dimensions, but by examining the properties of the modules over the commutative Noetherian ring with finite valuation dimensions.

Our main contribution in this dissertation is the characterization of commutative Noetherian ring classes with finite valuation dimensions which are done by approaching through the local ring. In particular, it is shown that a commutative Noetherian ring R has a finite valuation dimension if and only if R is a valuation ring or an Artinian ring. On the other hand, we give a method to determine the uniserial dimension of a finitely generated module M over a discrete valuation ring R by approaching the decomposition of a finitely generated module over a discrete valuation ring, both through the torsion and the torsion-free module, to explore the uniserial dimension from the module. It has been shown that the uniserial dimension

of a finitely generated module M over a discrete valuation ring R is a function of the module's elementary divisors and the rank of the non-torsion module part.

Additional results in this dissertation include the valuation dimensions of a principal ideal domain, obtained through an exploration of the factor ring of the principal ideal domain. Another additional result is a Python program code for calculating the valuation and uniserial dimensions of several rings and modules.

Keywords: *valuation dimension, uniserial dimension, Artinian ring, local ring, discrete valuation domain*