

## ABSTRAK

### GRAF RAMSEY MINIMAL UNTUK GRAF PADANAN

Oleh

**Kristiana Wijaya**

**NIM: 30112005**

**(Program Studi Doktor Matematika)**

Pengkonstruksian graf Ramsey minimal merupakan salah satu masalah yang berkembang dalam teori Ramsey. Misalkan  $F, G$ , dan  $H$  graf tak kosong tanpa titik terisolasi. Notasi  $F \rightarrow (G, H)$  mempunyai arti jika setiap sisi di  $F$  diberi warna merah atau biru, maka subgraf merah di  $F$  memuat graf  $G$  atau subgraf biru di  $F$  memuat graf  $H$ . Graf  $F$  adalah *graf Ramsey* untuk pasangan graf  $(G, H)$  jika  $F \rightarrow (G, H)$ .

Pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi  $F$  sehingga  $F$  tidak memuat graf  $G$  merah maupun graf  $H$  biru dinamakan *pewarnaan*-( $G, H$ ). Graf  $F$  adalah *graf Ramsey*  $(G, H)$ -*minimal* jika  $F \rightarrow (G, H)$  dan untuk setiap  $e \in E(F)$  berlaku  $(F - e) \not\rightarrow (G, H)$ . Himpunan semua graf Ramsey  $(G, H)$ -minimal dinotasikan dengan  $\mathcal{R}(G, H)$ . Himpunan  $\mathcal{R}(G, H)$  dikatakan *berhingga* jika banyaknya unsur di  $\mathcal{R}(G, H)$  berhingga. Bila tidak demikian, dikatakan  $\mathcal{R}(G, H)$  *tak-berhingga*.

Penelitian disertasi ini berfokus pada himpunan Ramsey  $\mathcal{R}(G, H)$  berhingga, yaitu ketika  $G$  merupakan *graf padanan*,  $mK_2$ , graf yang terdiri dari  $m$  buah sisi independen. Pada disertasi ini diperoleh syarat perlu dan cukup sebuah graf menjadi anggota  $\mathcal{R}(mK_2, H)$ , untuk sebarang graf  $H$  dan bilangan bulat positif  $m$ . Sebuah graf  $F$  adalah graf Ramsey untuk pasangan  $(mK_2, H)$  jika dan hanya jika setiap subgraf dari  $F$  yang diperoleh dengan cara menghapus beberapa titik atau sisi-sisi subgraf terinduksi dengan orde ganjil yang memuat paling banyak  $m - 1$  sisi independen akan memuat graf  $H$ . Sedangkan sifat minimal dari graf Ramsey ini dipenuhi jika dan hanya jika untuk setiap sisi  $e$  di  $F$ , terdapat subgraf di  $F - e$  yang diperoleh dengan cara menghapus beberapa titik atau sisi-sisi dari subgraf terinduksi dengan orde ganjil yang memuat paling banyak  $m - 1$  sisi independen, yang tidak memuat graf  $H$ . Namun demikian, syarat perlu dan cukup tersebut masih belum operasional, sehingga pengkarakterisasian semua graf di  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  masih merupakan permasalahan yang sulit.

Pada penelitian disertasi ini telah diperoleh semua graf tak-terhubung di  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  untuk sebarang graf terhubung  $H$ . Semua graf tak-terhubung dalam  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  ini diperoleh dari gabungan saling lepas dari graf-graf yang ada di  $\mathcal{R}(sK_2, H)$  dan di  $\mathcal{R}(tK_2, H)$  untuk suatu bilangan bulat positif  $s, t$ , dan  $m$ , dengan  $s + t = m$ . Untuk graf terhubung, telah diperoleh karakterisasi semua graf Ramsey  $(G, H)$ -minimal dari beberapa kelas graf  $H$ , yaitu  $(G, H) = (2K_2, K_4), (2K_2, C_4)$ ,

$(3K_2, K_3)$ , dan  $(4K_2, P_3)$ . Selanjutnya, beberapa sifat dari graf Ramsey  $(mK_2, H)$ -minimal juga dikaji. Dalam hal ini diperoleh hubungan antara graf Ramsey  $(mK_2, H)$ -minimal dan  $((m-1)K_2, H)$ -minimal. Sifat ini dapat membantu dalam mengkonstruksi graf Ramsey  $(mK_2, H)$ -minimal baru dari graf Ramsey minimal yang telah diketahui. Khusus untuk  $H$  graf lintasan dengan panjang 2, semua graf unisiklik di  $\mathcal{R}(mK_2, P_3)$  telah dapat dikarakterisasi.

Pada disertasi ini dibahas juga operasi pada graf Ramsey minimal, yaitu operasi identifikasi dan subdivisi. Dalam hal ini, jika  $H$  adalah sebuah graf lengkap atau siklus, maka graf yang diperoleh dari dua graf Ramsey  $(2K_2, H)$ -minimal yang terhubung dengan melakukan identifikasi pada satu titik atau sisi merupakan graf Ramsey  $(2K_2, 2H)$ -minimal. Selanjutnya, pada operasi subdivisi, dibuktikan bahwa jika  $F \in \mathcal{R}(mK_2, P_n)$  untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ , maka setiap graf yang diperoleh dengan subdivisi (sebanyak  $n$  kali) pada sisi yang bukan-pondan di  $F$  merupakan graf Ramsey untuk pasangan  $((m+1)K_2, P_n)$ . Namun, graf hasil subdivisi ini belum tentu minimal. Khusus untuk  $n = 3$  dan  $n = 4$  dapat diperoleh graf Ramsey minimal. Sedangkan untuk nilai  $n$  lainnya, hal ini masih terbuka.

Kata kunci: graf Ramsey minimal, pewarnaan merah-biru, graf padanan, subdivisi

## ABSTRACT

### RAMSEY MINIMAL GRAPHS FOR MATCHING GRAPH

by

**Kristiana Wijaya**

**NIM: 30112005**

**(Doctoral Program in Mathematics)**

*The problem of finding Ramsey minimal graphs is one of the problems developed from the classical Ramsey theory. Let  $F, G$ , and  $H$  be nonempty graphs without isolated vertices. We write  $F \rightarrow (G, H)$  if any arbitrary red-blue coloring on the edges of  $F$  implies that either the red subgraph of  $F$  contains a graph  $G$  or the blue subgraph of  $F$  contains a graph  $H$ . A graph  $F$  is a Ramsey graph for a pair of graphs  $(G, H)$  if  $F \rightarrow (G, H)$ .*

*A red-blue coloring of the edges of  $F$  so that  $F$  contains neither a red  $G$  nor a blue  $H$  is called a  $(G, H)$ -coloring. A graph  $F$  is a Ramsey  $(G, H)$ -minimal if  $F \rightarrow (G, H)$  and for each  $e \in E(F)$ ,  $(F - e) \not\rightarrow (G, H)$ . The set of all Ramsey  $(G, H)$ -minimal graphs will be denoted by  $\mathcal{R}(G, H)$ . The pair  $(G, H)$  is called Ramsey-finite if  $\mathcal{R}(G, H)$  is finite and Ramsey-infinite otherwise.*

*In this dissertation, we focus on Ramsey finite. In particular, we focus on  $G$  as a matching,  $G = mK_2$ , a graph consists of  $m$  independent edges. We obtain the necessary and sufficient conditions for all graphs in  $\mathcal{R}(mK_2, H)$ , for any graph  $H$  and positive integer  $m$ . A graph  $F$  is a Ramsey  $(mK_2, H)$  if and only if every subgraph of  $F$  obtained by deleting some vertices or edges of an odd induced subgraph containing at most  $m - 1$  independent edges will contain a graph  $H$ . A Ramsey  $(mK_2, H)$ -graph is minimal if and only if for every edge  $e$  in  $F$ , there exists a subgraph of  $F - e$  obtained by deleting some vertices or edges of an odd induced subgraph containing at most  $m - 1$  independent edges, contains no graph  $H$ . However, the necessary and sufficient conditions have not been operational. So, the characterization of all graphs in  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  is still a difficult problem.*

*In this dissertation, we obtain all disconnected graphs in  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  for any connected graph  $H$ . We show that all disconnected graphs in  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  can be obtained from a disjoint union of graphs in  $\mathcal{R}(sK_2, H)$  and in  $\mathcal{R}(tK_2, H)$ , for any connected graph  $H$  and for every positive integer  $s, t$ , and  $m$ , where  $s + t = m$ . For connected case, we have characterized all Ramsey  $(G, H)$ -minimal graphs for some classes of a graph  $H$ , namely for  $(G, H) = (2K_2, K_4), (2K_2, C_4), (3K_2, K_3)$ , and  $(4K_2, P_3)$ .*

*Next, some specific properties of Ramsey  $(mK_2, H)$ -minimal graphs are also investigated. We obtain a relation between Ramsey  $(mK_2, H)$ -minimal graph and Ramsey  $((m - 1)K_2, H)$ -minimal graph. This property can be then used for*

constructing some new Ramsey  $(mK_2, H)$ -minimal graph from the previous known Ramsey minimal graphs. In particular, if  $H = P_3$  we are able to characterize all unicyclic graph in  $\mathcal{R}(mK_2, P_3)$ .

Finally, we discuss some operations on Ramsey minimal graphs. In this case, we show that a graph obtained from any two connected graphs in  $\mathcal{R}(2K_2, H)$  by identifying a vertex or an edge is a member of  $\mathcal{R}(2K_2, 2H)$ , where  $H$  is a complete or a cycle. We also prove that if  $F \in \mathcal{R}(mK_2, P_n)$ , then any graph obtained from  $F$  by subdividing one non-pendant edge ( $n$  times) is a Ramsey  $((m + 1)K_2, P_n)$  graph. For  $n = 3$  and  $n = 4$ , we obtain the Ramsey  $((m + 1)K_2, P_n)$ -minimal graph. For  $n \geq 5$ , the minimality is still an open problem.

*Keywords:* Ramsey minimal graph, red-blue coloring, matching graph, subdivision