

## ABSTRAK

# BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF POHON DAN KARAKTERISASI GRAF POHON YANG MEMPUNYAI BILANGAN KROMATIK LOKASI BESAR

Oleh

**Dian Kastika Syofyan**

**NIM: 30113009**

**(Program Studi Doktor Matematika)**

Kajian tentang bilangan kromatik lokasi graf sudah dimulai sejak tahun 2002 oleh Chartrand dkk. dan saat ini telah mendapatkan banyak perkembangan. Konsep bilangan kromatik lokasi tersebut merupakan kasus khusus dari dimensi partisi graf. Secara sederhana, bilangan kromatik lokasi suatu graf  $G$  dapat didefinisikan sebagai kardinalitas dari suatu partisi minimum dari himpunan simpul  $V(G)$  sedemikian sehingga semua simpul mempunyai koordinat yang berbeda terhadap partisi tersebut dan setiap dua simpul yang bertetangga di  $G$  tidak termasuk ke dalam kelas partisi yang sama. Dalam hal ini, koordinat simpul dinyatakan oleh jarak simpul tersebut terhadap kelas-kelas dalam partisi tadi.

Beberapa kelas graf telah diketahui bilangan kromatik lokasinya. Akan tetapi, hasil penelitian bilangan kromatik lokasi graf masih terbatas. Salah satu kelas graf yang menarik untuk dikaji adalah graf pohon. Diantara banyak kelas graf, graf pohon merupakan salah satu kelas graf yang penting dalam teori graf. Kajian bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon masih terbatas, yaitu pada lintasan, graf bintang, graf bintang ganda, graf amalgamasi bintang, graf kembang api, graf ulat, graf pohon pisang, graf  $n$ -ary, dan graf lobster. Oleh karena itu, pada disertasi ini, dikaji bilangan kromatik lokasi untuk kelas graf pohon lainnya.

Kelas graf pohon yang dikaji pada disertasi ini adalah graf pohon yang mempunyai derajat maksimum 3 atau 4, diantaranya graf pohon yang dapat disisipkan pada kisi-kisi berdimensi dua dan graf pohon biner. Dibuktikan bahwa batas atas bilangan kromatik lokasi graf pohon yang dapat disisipkan pada kisi-kisi berdimensi dua adalah 5. Sedangkan untuk graf pohon biner diberikan batas atas bilangan kromatik lokasinya bergantung pada diameternya. Selanjutnya, pada disertasi ini dibahas bilangan kromatik lokasi untuk beberapa kelas graf pohon yang diperoleh dari hasil operasi graf. Operasi graf yang diperhatikan adalah operasi hasil kali korona dan operasi amalgamasi sisi pada graf pohon. Batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi graf pohon yang diperoleh dari hasil operasi graf diturunkan dalam disertasi ini.

Problem keputusan dalam penentuan bilangan kromatik lokasi untuk sebarang graf merupakan *NP-complete problem*. Hal ini berarti bahwa belum ada algoritma yang

efisien untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf. Furuya dan Matsumoto pada tahun 2015 telah memberikan suatu algoritma pewarnaan lokasi untuk menaksir batas atas bilangan kromatik lokasi sebarang graf pohon. Batas atas yang mereka berikan bergantung pada banyak daun dan banyak *local end-branch* pada graf pohon. Pada disertasi ini, diusulkan algoritma lain untuk menaksir batas atas ini. Batas atas yang dihasilkan dari algoritma ini dipengaruhi oleh parameter diameter, derajat terbesar, dan maksimum *end-path* pada graf pohon. Pada disertasi ini juga ditunjukkan bahwa batas atas yang diperoleh lebih baik dibandingkan batas atas yang diberikan oleh Furuya dan Matsumoto.

Dalam hal karakterisasi graf, beberapa peneliti telah berhasil melakukan karakterisasi graf dengan bilangan kromatik lokasi tertentu. Chartrand dkk. pada tahun 2002 berhasil memberikan karakterisasi semua graf orde  $n$  dengan bilangan kromatik lokasi  $n$ , yakni semuanya adalah graf multipartit lengkap. Selanjutnya, Chartrand dan Zhang di tahun 2003 juga memberikan karakterisasi semua graf orde  $n$  dengan bilangan kromatik lokasi  $n - 1$ . Semua graf dengan bilangan kromatik lokasi 3 diberikan oleh Asmiati dan Baskoro (2012) dan Baskoro dan Asmiati (2013). Pada disertasi ini diberikan karakterisasi semua graf pohon orde  $n$  yang memiliki bilangan kromatik lokasi  $n - t$ , untuk  $t < n/2$ .

**Kata Kunci:** *bilangan kromatik lokasi, graf pohon, hasil kali korona, amalgamasi sisi, karakterisasi graf pohon, kisi-kisi berdimensi dua.*

## ABSTRACT

# THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER OF TREES AND CHARACTERIZATION OF TREES HAVING LARGE LOCATING-CHROMATIC NUMBER

by

**Dian Kastika Syofyan**

**NIM: 30113009**

*(Doctoral Program in Mathematics)*

*The investigation on the locating chromatic number of graphs was firstly studied by Chartrand et.al on 2002 and now it has received much development. The concept of the locating chromatic number of graphs is a special case of the partition dimension of graphs. The locating-chromatic number of a graph  $G$  is defined as the cardinality of a minimum resolving partition of the vertex set  $V(G)$  such that all vertices have distinct coordinates with respect to this partition and every two adjacent vertices in  $G$  must not be contained in the same partition class. In this case, the coordinate of a vertex is expressed in terms of the distances of the vertex to all partition classes.*

*The locating-chromatic numbers for some classes of graphs have been studied. However, the results are still very limited. One class of graphs which has received much attention in studying its locating-chromatic number is trees. However, up to now the results are still very limited and still far from satisfactory. As one of the important classes, trees have received much studies for various graph notions and concepts. The study of the locating-chromatic numbers for trees is still limited only to its subclasses such as paths, stars, double stars, amalgamation of stars, firecrackers, caterpillars, banana trees,  $n$ -ary trees, and lobsters. Therefore, in this dissertation, we examine the locating-chromatic number of some other classes of trees.*

*The classes of trees studied in this dissertation are all trees having maximum degree 3 or 4, i.e. the trees that can be embedded in two-dimensional grid and binary trees. We show that the upper bound on the locating-chromatic number of trees embedded in two-dimensional grid is 5. Furthermore, we derive the upper bound on the locating chromatic number of binary trees depending on the diameter of such trees. This dissertation also discusses the locating-chromatic number of trees that are obtained by a graph operation. The graph operations investigated are the corona product and the edge-amalgamation on trees. The upper and lower bounds on the locating-chromatic number of trees obtained by these operations are derived.*

*The decision problem for the locating chromatic number of any graph is an NP-complete problem. This means that there is no efficient algorithm to determine the locating-chromatic number of any graph. Furuya and Matsumoto on 2015 have constructed a locating coloring algorithm to estimate an upper bound on*

*the locating-chromatic number of trees. This upper bound depends on the number of leaves and the number of local end-branch in trees. In this dissertation, we propose a different algorithm to estimate the upper bound. The upper bound, which is generated from this algorithm, depends on diameter, maximum degree, and maximum number of end-path in trees. In this dissertation we also show the upper bound is better than the upper bound of Furuya dan Matsumoto.*

*The characterisations of all graphs having a certain locating chromatic number have also been done. Chartrand et.al on 2002 characterized all graphs of order  $n$  with locating chromatic number  $n$ ; namely they are complete multipartite graphs. Furthermore, Chartrand and Zhang on 2003 also characterized all graphs of order  $n$  with locating chromatic number  $n - 1$ . All graphs with locating chromatic number 3 are determined by Asmiati and Baskoro on 2012 and 2013. In this dissertation, we characterize all trees of order  $n$  with locating-chromatic number  $n - t$ , for  $t < n/2$ .*

**Keywords:** *locating chromatic number, tree, corona product, edge-amalgamation, characterization, two-dimensional grid.*